11.osztály

1. Bizonyítsd be a $3\sin^2 x \geq 2\sin 2x - 1$ egyenlőtlenséget!

2.Határozd meg a *p* és *q* prímszámokat, ha tudjuk, hogy az $x^4 - px^3 + q = 0$ egyenletnek van egész gyöke!

3.Oldd meg a

$$\frac{\sqrt{\frac{1+x^2}{2x}+1}-\sqrt{\frac{1+x^2}{2x}-1}}{\sqrt{\frac{1+x^2}{2x}+1}+\sqrt{\frac{1+x^2}{2x}-1}} = \log_2\left(|x-2|+|x+2|\right)-\frac{11}{9}$$

egyenletet!

4. A konvex (domború) négyszöget az átlói négy olyan háromszögre osztják, amelyek területe egész szám. Bizonyítsd be, hogy e négy szám szorzata négyzetszám!

5. $f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}$. Számítsd ki az $f\left(\frac{1}{2014}\right)+f\left(\frac{2}{2014}\right)+\ldots+f\left(\frac{2013}{2014}\right)+f(1)$ összeget!

11 клас

1. Довести нерівність

$$3\sin^2 x \geq 2\sin 2x - 1.$$

2.Знайти прості числа *p* і *q*, коли відомо, що рівняння $x^4 - px^3 + q = 0$ має цілий корінь.

3.Розв язати рівняння

$$\frac{\sqrt{\frac{1+x^2}{2x}+1}-\sqrt{\frac{1+x^2}{2x}-1}}{\sqrt{\frac{1+x^2}{2x}+1}+\sqrt{\frac{1+x^2}{2x}-1}} = \log_2\left(|x-2|+|x+2|\right)-\frac{11}{9}.$$

4.Опуклий чотирикутник розбитий діагоналями на .4 трикутники, площі яких виражаються цілими числами. Доведіть, що добуток цих чисел є квадратом цілого числа.

5. $f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}$. Знайти сумму $f\left(\frac{1}{2014}\right)+f\left(\frac{2}{2014}\right)+\ldots+f\left(\frac{2013}{2014}\right)+f(1)$

4.Опуклий чотирикутник розбитий діагоналями на .4 трикутники, площі яких виражаються цілими числами. Доведіть, що добуток цих чисел є квадратом цілого числа.

Megoldás

1. $(2\sin x-\cos x)^2\geq 0$. Inen

$$4\sin^2 x-4\sin x\cos x+\cos^2 x\geq 0$$

$$3\sin^2 x\geq -\sin^2 x+4\sin x\cos x-\cos^2 x=2\sin 2x-1$$

2. Legyen az egész gyök x_1. Akkor $q=px_1^3-x_1^4=x_1^3(p-x_1)$. Mivel q prímszám, $x_1=1$ vagy $x_1=-1$.

Ha $x_1=1$, akkor $q=p-1$, ahonnan *p=3, q=2.*

Ha $x_1=-1$, akkor $q=-p-1$, ami lehetetlen. Felelet: *p=3, q=2.*

3. *x* megengedett értékei: $(0;+\infty)$. Átalakítás után az

$$\frac{|1+x|-|1-x|}{|1+x|+|1-x|}=\log_2(|x-2|+|x+2|)-\frac{11}{9}$$ egyenletet kapjuk.

1. $\begin{cases}0<x\leq 1\\ x=\frac{7}{9}\end{cases}$, innen $x=\frac{7}{9}$;
2. $\begin{cases}1<x\leq 2\\ \frac{1}{x}=\frac{7}{9}\end{cases}$, innen $x=\frac{9}{7}$;
3. $\begin{cases}2<x\\ \frac{1}{x}=\log_2 x-\frac{2}{9}\end{cases}$

Ha $x>2$, akkor $\frac{1}{x}<\frac{1}{2};\quad \log_2 x-\frac{2}{9}>1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}>\frac{1}{2}$. Ezért itt nincs megoldás.

Felelet: $x_1=\frac{7}{9};\quad x_2=\frac{9}{7}$.

4. Legyen *ABCD* az adott négyszög. *AC* és *BD* átlók metszéspontja legyen *O*. *B* pontból és a *D* pontból az *AC* egyenesre húzott merőleges hossza legyen h_1 és h_2 megfelelően. *AOB, OCB, OCD* és *OAD* háromszögek területei legyenek S_1, S_2, S_3 és S_4 megfelelően.

$$S_1\cdot S_3=\frac{1}{2}AO\cdot h_1\cdot\frac{1}{2}OC\cdot h_2=\frac{1}{2}OC\cdot h_1\cdot\frac{1}{2}AO\cdot h_2=S_2\cdot S_4$$

Akkor $S_1\cdot S_3\cdot S_2\cdot S_4=(S_1\cdot S_3)^2$

5. $f(x)+f(1-x)=\frac{4^x}{4^x+2}+\frac{4^{1-x}}{4^{1-x}+2}=\frac{4^x}{4^x+2}+\frac{2}{4^x+2}=1$ Akkor

$$f\left(\frac{1}{2014}\right)+f\left(\frac{2}{2014}\right)+...+f\left(\frac{2013}{2014}\right)+f(1)=1006+f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)=1006+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=1007\frac{1}{6}$$

Felelet: $1007\frac{1}{6}$